Die folgenden 8 Aufgaben sind Multiple Choice Aufgaben. *Zur Erinnerung: Jede MC-Aufgabe besteht aus drei Teilen, die jeweils mit richtig oder falsch beantwortet werden können. Eine richtige Antwort gibt **2** Punkte, eine falsche Antwort **-2** Punkte. Jedoch können pro Aufgabe nie weniger als 0 Punkte erzielt werden. Damit ist jede MC-Aufgabe zwischen 0 und 6 Punkten wert.*

---

1. Welche der folgenden uneigentlichen Integrale existieren?

(a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\log(x)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \log(x)^2\,\mathrm{d}x$

Lösung. (a) Falsch. Das Integral ist gleich $\lim_{t\to\infty}\big[\log\log(x)\big]_e^t = \lim_{t\to\infty}\log\log(t)$, existiert also nicht.

(b) Wahr. Das Integrand ist positiv und gleich

$$\frac{1}{x^2+x} < \frac{1}{x^2}.$$

Da $\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ existiert, existiert auch das ursprüngliche Integral.

(c) Wahr. Zweifache partielle Integration gibt

$$\int_0^1 \log(x)^2\,\mathrm{d}x = \big[x\log^2(x)\big]_0^1 - 2\int_0^1 x\log(x)\,\mathrm{d}x = -2\,[x\log(x)]_0^1 + 2\int_0^1 \mathrm{d}x = 2,$$

da $\lim_{t\to 0} t\log(t) = 0$ ist, das Integral existiert also. □

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Ist f nicht injektiv, so existiert ein $x\in\mathbb{R}$ mit $f'(x)=0$.

(b) Falls ein $x\in\mathbb{R}$ mit $f'(x)=0$ existiert, so ist f nicht injektiv.

(c) Falls eine Umkehrfunktion von f existiert, so ist diese differenzierbar.

Lösung. (a) Wahr. Ist f nicht injektiv, so existieren $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a\neq b$ und $f(a)=f(b)$. Laut dem Mittelwertsatz existiert nun ein $x\in[a,b]$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

(b) Falsch. Gegenbeispiel: $f(x)=x^3$.

(c) Wahr. □

3. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kurve in der Ebene und $l(\mathcal{C})$ deren Bogenlänge. Weiters seien $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, und $\delta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $s \mapsto (\delta_1(s), \delta_2(s))$, zwei Parametrisierungen von $\mathcal{C}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Es gilt
$$\int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma_1}(t)^2 + \dot{\gamma_2}(t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\dot{\delta}_1(s)^2 + \dot{\delta}_2(s)^2}\,\mathrm{d}s.$$

(b) Der Teilweg $\tilde{\gamma} : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ für $0 \leq t \leq 1/2$, hat die halbe Bogenlänge von γ.

(c) Zu jedem $t \in [0,1]$ gibt es ein $s \in [0,1]$, sodass $\gamma(t) = \delta(s)$.

[Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ ist durch
$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$
gegeben.]

Lösung. (a) Wahr. Die linke und die rechte Seite sind beide gleich $l(\mathcal{C})$.

(b) Falsch. Halbe Parametrisierung entspricht nicht gleich halber Bogenlänge.

(c) Wahr, da γ und δ dieselbe Kurve beschreiben. □

4. Welche der unendlichen Summen konvergieren?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.01^n}$

Lösung. (a) Falsch. Da $\log(n) \geq 1$ für $n \geq 3$ und die Summe $\sum n^{-1}$ divergiert, muss auch diese Summe divergieren.

(b) Wahr. Da $|\sin(n)| \leq 1$ ist und die Summe $\sum n^{-2}$ konvergiert, konvergiert auch diese Summe.

(c) Wahr. Dies ist einfach eine geometrische Reihe. □

5. Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei $b_1, b_2, \ldots$ eine weitere Folge reeller Zahlen, definiert durch $b_1 = a_1$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese richtig oder falsch ist.

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Falls die Folge b_n konvergiert, so konvergiert auch die Folge a_n.

(c) Falls a_n beschränkt und monoton steigend ist, so ist b_n eine Nullfolge.

Lösung. (a) Falsch. Betrachte die Folge $(1, 0, 1, 0, \dots)$.

(b) Falsch. Betrachte die Folge $(1, 2, 3, 4, \dots)$. Dann ist $b_n = 1$ für alle n, die Folge a_n divergiert aber.

(c) Wahr. Da a_n beschränkt und monoton steigend ist, konvergiert die Folge a_n gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Folglich gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = 0$. □

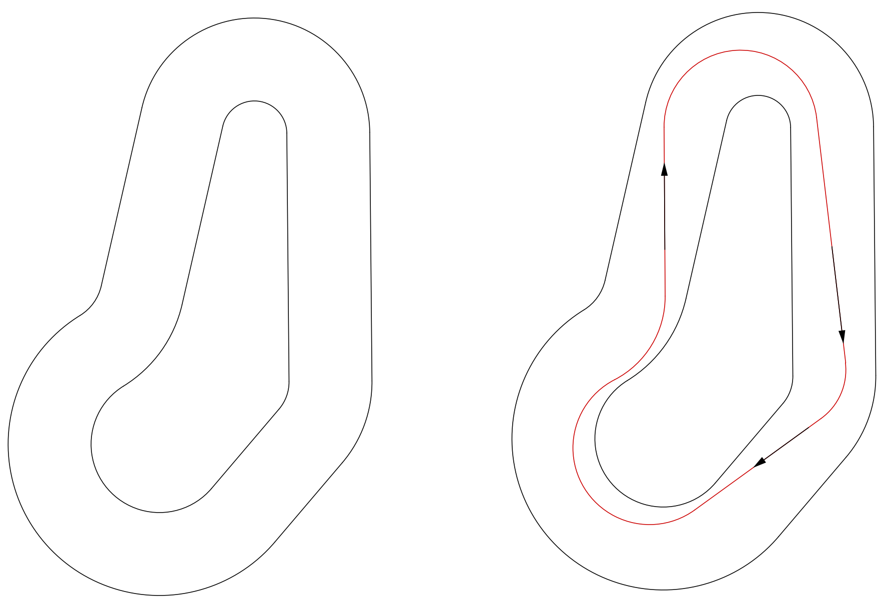
6. Betrachten Sie die unten links abgedruckte Rennbahn. Sie sitzen in einem Auto und legen im Uhrzeigersinn eine Runde auf dieser Rennbahn zurück, wobei Ihr Bahnverlauf fortwährend auf dem Asphalt aufgemalt wird, wie im rechten unteren Bild veranschaulicht. Aus Gründen der Abstraktion nehmen wir an, dass der Bahnverlauf immer durch eine geschlossene Kurve gegeben ist. Ist es für Sie möglich, die Runde derart zu absolvieren, dass die Krümmung des aufgemalten Bahnverlaufs

(a) ... auf zumindest 80 Prozent der Strecke gleich 0 ist?

(b) ... immer dasselbe Vorzeichen hat?

(c) ... konstant ist?

[Für jede der drei Fragen kann ein eigener Bahnverlauf gewählt werden.]



Lösung. (a) Wahr. Wir können uns vorstellen, immer möglichst lange gerade zu fahren und jede Kurve sehr klein zu halten. (Auf diese Weise könnten wir auch 99,99 Prozent der Strecke mit Krümmung 0 zurücklegen.)

(b) Wahr.

(c) Falsch. Kein Kreis passt in diese Rennstrecke. □

7. Welche der folgenden Funktionen sind Asymptoten der Funktion $x \mapsto \sqrt{x + 900}$ für $x \to \infty$?

(a) $x \mapsto \sqrt{x}$

(b) $x \mapsto \sqrt{x} + 30$

(c) $x \mapsto \sqrt{x + 30}$

Lösung. (a) Wahr. Es gilt

$$\sqrt{x+900} - \sqrt{x} = \frac{900}{\sqrt{x+900} + \sqrt{x}} \to 0$$

für $x \to \infty$.

(b) Falsch. Es gilt

$$\sqrt{x+900} - \sqrt{x} - 30 = \frac{900}{\sqrt{x+900} + \sqrt{x}} - 30 \to -30$$

für $x \to \infty$.

(c) Wahr. Es gilt

$$\sqrt{x+900} - \sqrt{x+30} = \frac{870}{\sqrt{x+900} + \sqrt{x+30}} \to 0$$

für $x \to \infty$. □

8. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 1$. Welche der folgenden Funktionen sind Tangenten an f?

(a) $x \mapsto -x + 1$

(b) $x \mapsto \sqrt{7}x - 3$

(c) $x \mapsto -4x - 8$

Lösung. Die Funktion $x \mapsto ax+b$ ist genau dann eine Tangente an $x \mapsto \frac{1}{2}x^2+1$, wenn die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}x^2-ax+1-b=0$ zwei identische Lösungen besitzt, also die Diskriminante $a^2+2(b-1)=0$ ist. Es muss also $b = 1 - a^2/2$ gelten.

(a) Falsch.

(b) Falsch.

(c) Falsch. □

Die folgenden 18 Aufgaben sind Single Choice Aufgaben. *Zur Erinnerung: In jeder SC-Aufgabe gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Eine richtige Antwort gibt **3** Punkte. Es gibt keine Abzüge für falsche Antworten, raten lohnt sich daher!*

---

9. Es sei $\gamma\colon\ [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve in der Ebene, gegeben durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, wobei

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{1 - \sinh(u)^2}\,\mathrm{d}u, \quad y(t) = \cosh(t) \quad \text{für } 0 \le t \le \log(2).$$

Berechnen Sie die Oberfläche, die bei einer Rotation von γ um die x-Achse entsteht.

(a) $3\pi/2$

(b) 2π

(c) $5\pi/2$

[Die Oberfläche, die bei einer Rotation der Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ um die x-Achse entsteht ist durch

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

gegeben.]

Lösung: (a). Es ist $\dot{x}(t) = \sqrt{1 - \sinh(t)^2}$ und folglich ist die Oberfläche gleich

$$2\pi \int_0^{\log(2)} \cosh(t)\,\mathrm{d}t = 3\pi/2.$$

□

10. In welcher Menge liegt der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x}$?

(a) $\{-\infty\} \cup (-\infty, -1]$

(b) $(-1, 1)$

(c) $[1, \infty) \cup \{\infty\}$

Lösung: (a). Zweifaches Anwenden des Satzes von L'Hôpital ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{\cos(x) - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{\cos^3(x)} = -2.$$

□

11. Welches ist das grösstmögliche Intervall, auf dem die Reihe

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\left(2\sqrt{x} - 4\right)^n}{2^n}$$

konvergiert?

(a) $(1, 9)$

(b) $(-2, 2)$

(c) $(1, 3)$

Lösung: (a). Es muss $|\sqrt{x} - 2| < 1$ gelten. □

12. Welche geometrische Form hat die komplexe Region

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < |z - 2 - 3i|\}?$$

(a) Sie ist ein Kreis

(b) Sie ist ein Rechteck

(c) Sie ist eine Halbebene

Lösung: (c). Die Region B enthält alle Punkte, die näher bei i als bei $2+3i$ liegen. Die Gerade, die senkrecht auf das Segment von i nach $2+3i$ steht und durch dessen Mittelpunkt, $1+2i$, geht, enthält genau jene Punkte, die gleich weit von i und $2+3i$ entfernt sind. Die Halbebene, die durch diese Gerade begrenzt wird und den Punkt i enthält, ist also die gesuchte Region B. □

13. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{\cos(2x)+1}{\cos(x)}$. Welche der drei folgenden Funktionen ist eine Asymptote von f für $x \to \infty$?

(a) $2\cos x$

(b) $\cos 2x$

(c) $\sin x$

[Es gilt $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ *für alle reellen Zahlen a und b.]*

Lösung: (a). Es gilt

$$\frac{\cos(2x)+1}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) - \sin^2(x) + 1}{\cos(x)} = \frac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} = 2\cos(x).$$ □

14. Durch Berechnen der Taylorreihe von $x \mapsto e^{\sinh(x)}$ um $x = 0$ erhält man eine Potenzreihe der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Welchen Wert hat a_2?

(a) 0

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 1

Lösung: (b). Es bezeichne f die Funktion $x \mapsto e^{\sinh(x)}$. Der gesuchte Koeffizient a_2 ist durch $\frac{f''(0)}{2}$ gegeben. Es ist

$$f'(x) = \cosh(x)e^{\sinh(x)}, \quad f''(x) = (\sinh(x) + \cosh^2(x))e^{\sinh(x)}$$

und somit $f''(0) = 1$. □

15. Es sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom sechsten Grades, definiert auf den gesamten reellen Zahlen (beispielsweise $p(x) = x^6 + 4x^4 + 3$). Wie viele lokale Maximalstellen kann p höchstens haben?

(a) 3

(b) 5

(c) 6

Lösung: (a). Zwischen zwei Maximalstellen liegt zwangsläufig eine Minimalstelle. □

16. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

(a) -1

(b) 2

(c) 4

Lösung: (c). Substituieren wir $u = \sqrt{x}$, so ist $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$ und somit

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u = 2\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = 4. \qquad \square$$

17. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$, ist positiv. Die Region, begrenzt durch die x-Achse, die y-Achse und den Graphen von f wird um die y-Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

(a) $\frac{11\pi}{6}$

(b) $\frac{11\pi}{12}$

(c) $\frac{11\pi}{15}$

[Tipp: Integrieren Sie eine geeignete Funktion bezüglich x.]

Lösung: (c). Wir gehen wie in Serie 11 vor. Betrachten wir das Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ auf der x-Achse, so hat dies nach der Rotation um die y-Achse eine Fläche von $2\pi x\,\mathrm{d}x$ und trägt folglich $2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$ zum Volumen bei. Integrieren wir diesen Ausdruck nun bezüglich x, so erhalten wir

$$\int_0^1 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{11\pi}{15}. \qquad \square$$

18. Betrachten Sie die Funktion $f\colon x \mapsto \int_0^x e^t\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Auf welchem der folgenden Intervalle ist f konvex?

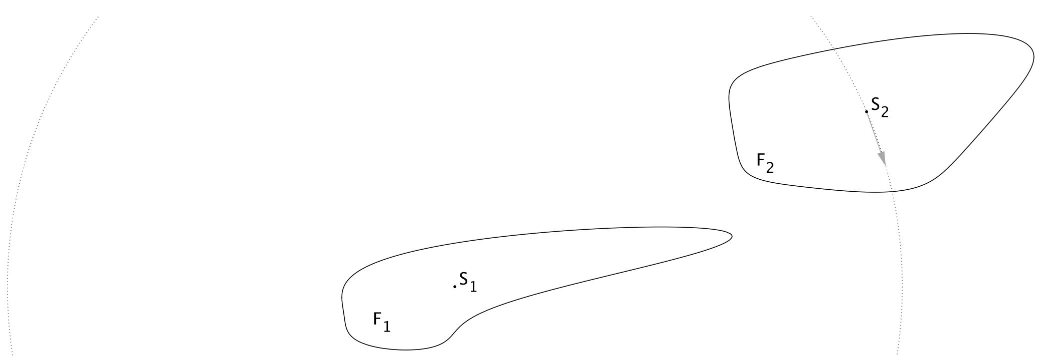
(a) $[\pi/4, \pi]$

(b) $[-\pi/2, \pi/4]$

(c) $[0, \pi/2]$

Lösung: (b). Differenzieren wir die Funktion f zwei Mal, so erhalten wir $f''(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$. Somit ist f genau an jenen Stellen x konvex, an denen $f''(x) \geq 0$, also $\cos(x) \geq \sin(x)$ gilt. Dies entspricht den Intervallen $2k\pi + [-3\pi/4, \pi/4]$ für $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

19. Betrachten Sie untenstehende Konfiguration, bestehend aus zwei Flächen F_1 und F_2. Wir bezeichnen mit S_1 den Schwerpunkt von F_1, mit S_2 den Schwerpunkt von F_2 und mit S den gemeinsamen Schwerpunkt von $F_1 \cup F_2$. Nun rotieren wir F_2 um F_1 derart, dass der Abstand zwischen S_2 und S_1 konstant bleibt. Welche Kurve beschreibt die Bewegung vom gemeinsamen Schwerpunkt S?



(a) Ein Kreis

(b) Eine Ellipse, die kein Kreis ist

(c) Die Kurve kann nicht hinreichend beschrieben werden

Lösung: (a). Der Schwerpunkt von F ist das gewichtete Mittel der Schwerpunkte S_1 und S_2, es gilt also $S = a_1 S_1 + a_2 S_2$, wobei a_1 und a_2 positive reelle Konstanten sind, die nur von der Fläche von F_1 bzw. F_2 abhängig sind. Wird nun S_2 um S_1 gedreht, so folgt aus der eben angeschriebenen Formel für S, dass sich auch S in einem Kreis bewegt. □

20. Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x^{\sqrt{\log(x)}}$ und $g(x) = e^{\log^2(x)}$, definiert auf $[1, \infty)$. Kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$

(b) $g(x) = o(f(x))$ für $x \to \infty$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ für $x \to \infty$

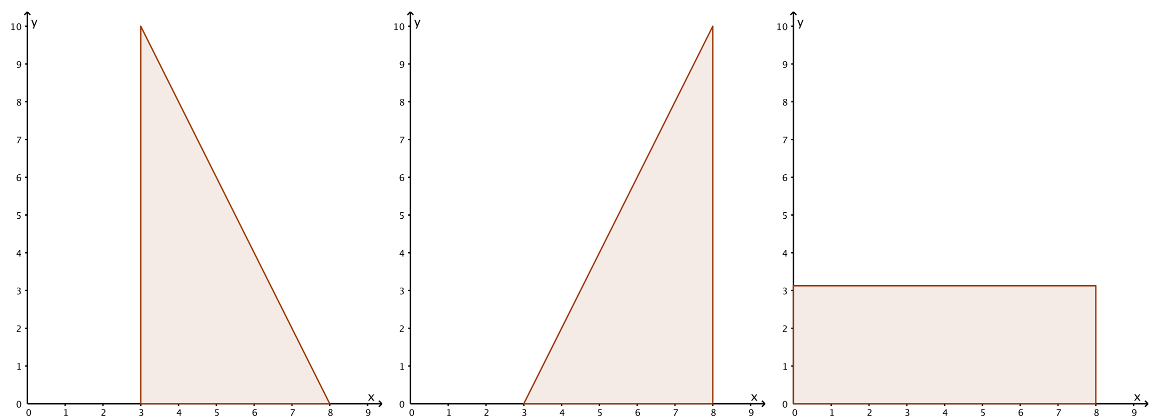
Lösung: (a). Es gilt $f(x) = e^{\log^{1.5}(x)}$ und da $\log^{1.5}(x) = o(\log^2(x))$ für $x \to \infty$ gilt, gilt auch $f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$. □

21. Welche der folgenden drei Flächen, die alle aus dem gleichen Material konstanter Dichte bestehen und gleich schwer sind, hat bei einer Rotation um die y-Achse das grösste Flächenträgheitsmoment?

(a) Die Linke

(b) Die Mittlere

(c) Die Rechte



Lösung: (b). Intuitiv: Kein Punkt der linken und rechten Fläche ist weiter weg von der y-Achse als einer der mittleren. □

22. Was ist die x-Koordinate des Schwerpunkts des Inneren der Halbellipse, gegeben durch

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ für } x \ge 0 \right\},$$

wobei a und b positive reelle Zahlen sind?

(a) $\frac{4a}{3\pi}$

(b) $\frac{ab}{3\pi}$

(c) $\frac{2a}{3\pi}$

[Die x-Koordinate des Schwerpunkts genügt der Gleichung

$$x_S \int G(x)\,\mathrm{d}x = \int xG(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $G(x)$ die y-Ausdehnung der Figur an der Stelle x ist. Weiters ist die Fläche der Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$ durch πab gegeben.]

Lösung: (a). Der Term $\int_0^a G(x)\,\mathrm{d}x$ entspricht der Fläche der Halbellipse, ist also gleich $\frac{1}{2}\pi ab$. Weiters gilt $G(x) = 2b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Substituieren wir nun $x = a\sin(u)$ für $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, so folgt $\mathrm{d}x = a\cos(u)\,\mathrm{d}u$ und wir erhalten

$$x_S = \frac{4a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{4a}{\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}. \qquad \square$$

23. Es sei p ein reelles Polynom vom Grad 10 mit $p(-i) = p(i) = p(2i) = p(3i) = 0$. Was ist die grösste Anzahl an reellen Nullstellen, die p haben kann?

(a) 2

(b) 4

(c) 6

Lösung: (b). Da p ein reelles Polynom ist, ist die komplex Konjugierte einer Nullstelle wieder eine Nullstelle. Folglich hat p zumindest die Nullstellen $\pm i, \pm 2i, \pm 3i$. Folglich kann p höchstens 4 reelle Nullstellen haben. Ein Beispiel das zeigt, dass dies auch erreicht werden kann ist

$$p(X) = X(X-1)(X-2)(X-3)(X^2+1)(X^2+4)(X^2+9)$$

mit Nullstellen $0, 1, 2, 3, \pm i, \pm 2i, \pm 3i$. $\square$

24. Welcher Ausdruck entspricht dem unbestimmten Integral $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$?

(a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3 e^x + C$

(c) $\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1\right)e^x + C$

Lösung: (a). Zwei Mal partiell integrieren. $\square$

25. Ein *Deltoid* ist durch die Parameterdarstellung

$$x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t),$$
$$y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$$

gegeben, wobei $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt und a eine Konstante ist. Welcher Ausdruck entspricht der Bogenlänge des Deltoids?

(a) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(b) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{5+4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

(c) $a\int_0^{2\pi}\sqrt{5-4\cos(3t)}\,\mathrm{d}t$

[Die Bogenlänge einer Kurve $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$ ist durch

$$\int_a^b\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

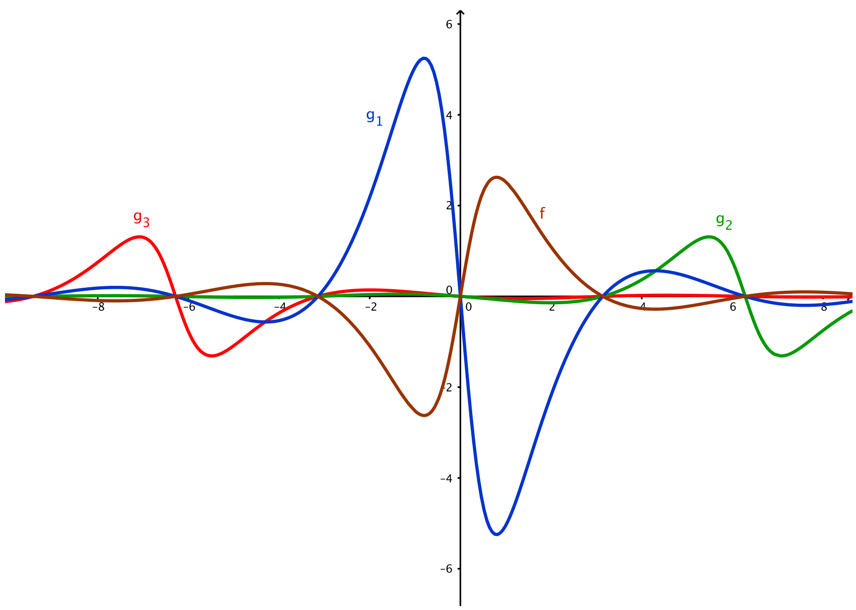
gegeben. Weiters gilt $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ für alle reellen Zahlen a und b.]

Lösung: (a). Es ist

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2&=(-2a\sin(t)-2a\sin(2t))^2+(2a\cos(t)-2a\cos(2t))^2\\&=8a^2-8a^2(\cos(t)\cos(2t)-\sin(t)\sin(2t))\\&=8a^2(1-\cos(3t)).\end{aligned}$$

□

26. Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei durch $f(x)=\frac{6\sin(x)}{x^2+1}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gegeben. Weiters sei die Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch $g(x)=\frac{-3\sin(x+2\pi)}{(x+2\pi)^2+1}$ gegeben. Welcher der Graphen der Funktionen g_1, g_2 bzw. g_3 entspricht dem Graph der Funktion g in der nachstehenden Abbildung?



(a) g_1

(b) g_2

(c) g_3

Lösung: (c). Es gilt $g(x)=-\frac{1}{2}f(x+2\pi)$. Folglich erhalten wir den Graph von g indem wir den Graph von f zunächst an der x-Achse spiegeln, horizontal um den Faktor 2 stauchen und dann um 2π nach links verschieben. □